# Resumen Expresiones Algebraicas

Tutor : ALAN MONtt

UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ
Universidad del Estado

## 2.1. Expresiones algebraicas y términos semejantes

Una ***Expresión Algebraica*** es una combinación de números y letras que representan números reales unidos entre sí por las operaciones fundamentales de la aritmética (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación) o una combinación de ellas.

Ejemplo : $\{4x^2y + 3xy^3\}$ ← Expresion Algebraica

$\{x^2 - x = 6\}$ ← es una Ecuacion por haber una igualdad

Coeficiente

$A\,x^{b}$ → Grado o exponente

Parte Literal

### Tipos de expresiones

1. **Monomio** si tiene un término.
   Ejemplo: $2x$,$\sqrt{3}b^2$ y $\frac{2}{3}x^2z$.
2. **Binomio** si tiene dos términos.
   Ejemplo: $2x + 3y$, $\sqrt{3}b^2 - 7a$.
3. **Trinomio** si tiene tres términos.
   Ejemplo:$2a - 3b + 5d$, $3x + 2y - 5z$.
4. **Multinomio** si tiene cuatro o más términos.
   Ejemplo:$a + b - c + d$,$1 + 3x - 5x^2 + 7x^3 + x^4$

## 2.2. Polinomios

Se denomina ***Polinomio real de una variable real, de grado n,*** a la expresión algebraica que tiene la siguiente representación:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$
$$Con\ a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Ejemplo : $\left\{\begin{array}{l} P(x) = 3x^4 + x^2 + 1 \\ P(x) = 7x^6 + 3x^9 + x^4 + x^3 + 3x^2 \end{array}\right\}$

OJO: en los polinomios, la parte literal tiene exponentes enteros positivos $n$ (y el "0")

$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$ | NO hay exponente fraccionarios, ni raíces ni decimales

**Nota:** El grado de un polinomio en determinadas variables es el de su término (o términos) de más alto grado en esas variables.

# Operaciones Algebraicas

**Adición y Sustracción**: Para sumar o restar expresiones algebraicas, se suman o se restan términos semejantes. En éste tipo de operaciones se utilizan los llamados signos de colección o de agrupación. Los signos de colección más utilizados son: los paréntesis, los corchetes, las llaves y las barras.

$$a + b + (a + c - b) = 2a + c$$

- **Multiplicación de monomios:**
  En este caso, se multiplican los coeficientes y a continuación las partes literales aplicando las leyes de los exponentes.

$$2ab \cdot (-5bc) = -10ab^2c$$

- **Multiplicación de multinomios:**
  Se multiplica cada término del primer factor por el segundo factor, utilizando la propiedad distributiva.

$$(a + b + c) \cdot (d + e - f + g)$$
$$= a \cdot (d + e - f + g) + b(d + e - f + g) + c(d + e - f + g)$$

$$(a + 3b + c)(2a + 3c)$$
$$= a(2a + 3c) + 3b(2a + 3c) + c(2a + 3c)$$
$$= 2a^2 + 3ac + 6ab + 9bc + 2ac + 3c^2$$

$= 2a^2 + 5ac + 6ab + 9bc + 3c^2$

- **Productos Notables**

Los ***Productos Notables*** son ciertas formas de multiplicación de expresiones algebraicas cuyo producto se obtiene directamente, previa inspección de las expresiones. También reciben el nombre de ***identidades algebraicas***.

1. **Producto de una suma por su diferencia.**
   $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
2. **Cuadrado de un binomio.**
   $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$
3. **Cuadrado de un trinomio.**
   $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$
4. **Cubo de un binomio.**
   $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$
5. **Producto de un binomio por un trinomio que da una suma o diferencia de cubos.**

   $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$
   $(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$
6. **Productos de dos binomios con un término común**

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

# Division de Expresiones Algebraicas

- **División de monomios**: Para dividir dos monomios, multiplicamos el monomio dividendo por el inverso multiplicativo del monomio divisor.

  Ejemplo: $(3x^2y) : (5xy^2) = (3x^2y) \bullet \frac{1}{5xy^2} = \frac{3x}{5y}$,

- **División de un multinomio por un monomio**: Para dividir un multinomio por un monomio dividimos cada término del multinomio por el monomio.

  Ejemplo: $(x^2y^3 - 2xy^2 + x^2y) : (xy^2) = \frac{x^2y^3}{xy^2} - \frac{2xy^2}{x\ y^2} + \frac{x^2y}{xy^2} = xy - 2 + \frac{x}{y}$

# División de Polinomios

$P(x)$ : dividendo
$d(x)$ = divisor
$q(x)$ = cociente
$R(x)$ = Resto

Pasos a seguir:

1º Se ordenan los polinomios según potencias descendentes de la variable.

2º Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor. El resultado es el primer término del cociente.

3º Se multiplica el divisor por el primer término del cociente. Se obtiene un polinomio.

4º Este polinomio se resta del dividendo, obteniendo otro polinomio denominado resto.

5º Para determinar el segundo término del cociente se repite el mismo procedimiento anterior, teniendo ahora como dividendo el resto.

6º Se sigue la división hasta obtener un resto que sea cero o de grado inferior al grado del divisor.

7º Si el resto o residuo es cero, se dice que la división es exacta.

Ej: $(6x^5 + x^4 + 4x^2 - 7x + 1) : (2x^2 + x - 3)$

Ejercicio resuelto en Tutoría:

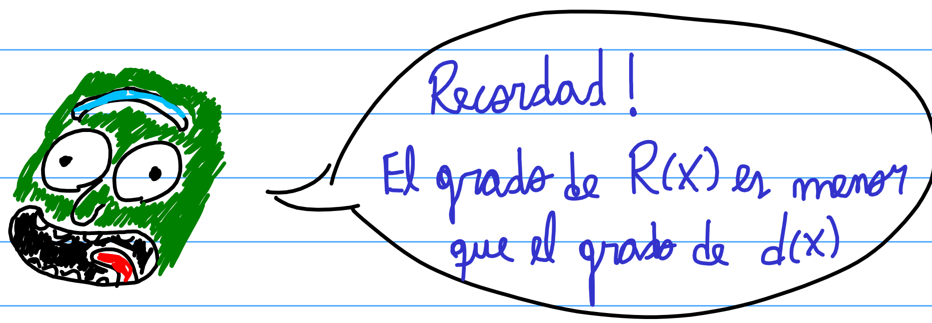
$$
\begin{array}{r|l}
\overbrace{6x^5 + x^4 + 0x^3 + 4x^2 - 7x + 1}^{P(x)} & \overbrace{2x^2 + x - 3}^{d(x)} \\
-(6x^5 + 3x^4 - 9x^3) & \underbrace{3x^3 - x^2 + 5x - 2}_{q(x)} \\
\hline
0 \quad -2x^4 + 9x^3 + 4x^2 - 7x + 1 & \\
-(-2x^4 - x^3 + 3x^2) & \\
\hline
0 \quad 10x^3 + x^2 - 7x + 1 & \\
-(10x^3 + 5x^2 - 15x) & \\
\hline
0 \quad -4x^2 + 8x + 1 & \\
-(-4x^2 - 2x + 6) & \\
\hline
0 \quad \underbrace{10x^1 - 5}_{R(x)} &
\end{array}
$$

Por definicion del Algoritmo de la Division

$$\left\{ \frac{P(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{R(x)}{d(x)} \quad ó \quad P(x) = d(x)q(x) + R(x) \right\}$$

Nos queda:

$$\left\{ \frac{\overbrace{6x^5 + x^4 + 4x^2 - 7x + 1}^{P(x)}}{\underbrace{2x^2 + x - 3}_{d(x)}} = \underbrace{3x^3 - x^2 + 5x - 2}_{q(x)} + \frac{\overbrace{10x - 5}^{R(x)}}{\underbrace{2x^2 + x - 3}_{d(x)}} \right\}$$




# Division Sintetica

Sean $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, un polinomio de grado $n$, polinomio dividendo y $D(x) = x - a$ un polinomio de grado 1, polinomio divisor. Por el algoritmo de la división $P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R(x)$, donde $Q(x)$ es el polinomio cuociente de grado $(n - 1)$ y $R(x)$es el resto.

Para determinar el resto y los coeficientes de $Q(x)$, podemos utilizar el método de la ***división sintética***, también llamada ***regla de Ruffini*** que consiste en:

1. Ordenar $P(x)$ en potencias decrecientes de x, completando todos los términos faltantes con ceros como coeficientes.
2. Escribir en una línea horizontal ***todos*** los coeficientes de $P(x)$. Ubicar "$\boldsymbol{a}$" al lado derecho de la primera fila.
3. Bajar el coeficiente principal $\boldsymbol{a_n}$ a la posición de una tercera línea horizontal, $(b_n)$.

   Multiplicar $\boldsymbol{a_n}$ por $\boldsymbol{a}$ y colocar el producto sobre una segunda línea horizontal bajo el segundo coeficiente $\boldsymbol{a_{n-1}}$.
   Sumar $a_{n-1}$ y el producto $a_n \cdot a$, colocando esa suma $(b_{n-1})$ en la tercera línea.

4. Multiplicar $b_{n-1}$ por $a$ y colocar el producto en la segunda línea debajo de $a_{n-2}$. Sumar $a_{n-2}$ y el producto $b_{n-1} \cdot a$, colocando dicha suma $(b_{n-2})$en la tercera línea.
5. Continuar de esta manera hasta que el producto de $b_1$ y $a$ esté colocado en la segunda línea, abajo de $a_0$.
   Cuando $a_0$ y el producto $b_1 \cdot a$ se suman, el resultado es el residuo R; este se coloca en la tercera línea y el proceso se detiene.

   Así obtenemos:
   $R(x) = b_0$ , y

   $Q(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2 + \cdots + b_nx^{n-1}$ un polinomio de grado $(n-1)$.

Ejemplo: $(x^4 + 2x^3 - 6x + 1) : (x - 2)$

$a = 2$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -6 & 1 & 2 \\ & + & + & + & + & \\ & 1\cdot 2 & 4\cdot 2 & 8\cdot 2 & 10\cdot 2 & \\ \hline 1 & 4 & 8 & 10 & \boxed{21} & \\ \cdot\, x^{n-1} & \cdot\, x^{n-2} & \cdot\, x^{n-3} & \cdot\, x^{n-4} & & \end{array}$$

Grado del polinomio $n = 4$

Se añade el 0 pues aunque no se vea, hay un $0 \cdot x^2$

$R(x) = 21$ = resto

$q(x) = x^3 + 4x^2 + 8x + 10$ = Cociente

# Factorizacion

**Factorización**

Factorizar una expresión algebraica es descomponerla en factores.

- **Factor común:** $ac + af = a(c + f)$

  Donde $a$ es una expresión algebraica que puede ser monomio, binomio o multinomio.

- **Diferencia de cuadrados:** $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
  Luego, la diferencia de dos cuadrados es igual al producto de la suma de las bases por su diferencia.

- **Trinomio cuadrado perfecto:**

Un trinomio es el desarrollo del cuadrado de un binomio, si hay dos términos que son cuadrados perfectos del mismo signo y el tercer término es el doble producto de las bases de los términos.

Así $\boldsymbol{a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2}$

- **Otros trinomios:**

**i)** $\boldsymbol{x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)}$

**ii)** $\boldsymbol{acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)}$ **, o** $\boldsymbol{ax^2 + mx + n.}$

Se reduce a un polinomio de la forma $x^2 + px + q$ haciendo $ax^2 + bx + c = \frac{a}{a}(ax^2 + bx + c) = \frac{1}{a}(a^2x^2 + b(ax) + ac)$ que se factoriza como i).

- **Suma y diferencia de cubos:**

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$$
$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$$

Completacion de Cuadrados

$$x^2 + Bx + C = x^2 + 2\left(\frac{B}{2}x\right) + C$$

$$= x^2 + 2\left(\frac{B}{2}x\right) + C + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2$$ {Se llama "Sumar un Cero"

$$= x^2 + 2\frac{B}{2}x + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + C - \left(\frac{B}{2}\right)^2$$

$$= \underbrace{\left(x + \frac{B}{2}\right)^2}_{} + C - \left(\frac{B}{2}\right)^2$$ {OJO: B y C son constantes}

{Se llama Completacion de Cuadrados porque se trata de obtener un binomio al cuadrado!}