taller 5

1) Determinar la cardinalidad del conjunto $A \times B$, donde

$A = \{x \in \mathbb{Z} / -12 < x+6 < 20\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} / 10 < x^2 < 400$

leo $A = \{x \in \mathbb{Z} / -12 < x+6 < 20\}$

leo $-12 < x+6 < 20 \; / -6$

$-18 < x < 14$

$\rightarrow A = \{-17, -16, -15, -14, -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} / 10 < x^2 < 400\}$

leo $10 < x^2 < 400 \; / \sqrt{\;}$

$\pm\sqrt{10} < x < \pm 20$

$\pm 3{,}16227 < x < \pm 20$

$B = \{\pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8, \pm 9, \pm 10, \pm 11, \pm 12, \pm 13, \pm 14, \pm 15, \pm 16, \pm 17, \pm 18, \pm 19\}$

leo $B = 16$ elementos $\cdot 2 = 32$

$A = 31$ elementos

2) Hallar por extensión el conjunto

$M = \{ (s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (s^2 + 3s, t^2 - 7t) = (-2, -12) \}$

sea $(s^2 + 3s, t^2 - 7t) = (-2, -12)$

$s^2 + 3s = -2$

$s^2 + 3s + 2 = 0$

$(s + 1)(s + 2) = 0$

$s = -1 \quad \vee \quad s = -2$

$t^2 - 7t = -12 \quad / +12$

$t^2 - 7t + 12 = 0$

$(t - 4)(t - 3) = 0$

$t = 4$

$\vee$

$t = 3$

$\Rightarrow M = \{ (-1, 4) ; (-1, 3) ; (-2, 4) ; (-2, 3) \}$

3) Dado el conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{N} / \ x = \frac{1}{3}(2k-1), k \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x^2 + 1 \leq 12\}$$

determinar el conjunto $(A \cap B) \times (B - A)$

1^o $A \cap B$: $x = \frac{1}{3}(2k-1)$; $k \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{N}$

$$x^2 + 1 \leq 12 \quad /-12$$

$$x^2 - 11 \leq 0$$

$$(x - \sqrt{11})(x + \sqrt{11}) \leq 0$$

$$\left(\frac{1}{3}(2k-1)\right)^2 - 11 \leq 0$$

$$\left(\frac{2k}{3} - 1\right)^2 - 11 \leq 0$$

$$\frac{4k^2}{9} - \frac{4k}{3} + 1 - 11 \leq 0 \quad / \cdot 9$$

$$4k^2 - 12k - 90 \leq 0 \quad / \cdot \frac{1}{4}$$

$$k^2 - 3k - \frac{9 \cdot 5 \cdot 2}{4} \leq 0$$

$$k^2 - 3k - \frac{45}{2} \leq 0$$

$$k^2 - 3k - \frac{45}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \leq 0$$

$$\left(k - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{45}{2} - \frac{9}{4} \leq 0$$

$$\left(k - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{99}{4} \leq 0$$

$$\left(u-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{99}}{2}\right)^2\leq 0$$

$$\left(u-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{99}}{2}\right)\left(u-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{99}}{2}\right)\leq 0$$

$$\left(u-\left(\frac{3+\sqrt{99}}{2}\right)\right)\left(u+\frac{\sqrt{99}-3}{2}\right)\leq 0$$

Así $\frac{3+\sqrt{99}}{2}\approx 6,4749$

$\frac{\sqrt{99}-3}{2}\approx 3,4749$

	$-\infty$	$\frac{\sqrt{99}-3}{2}$		$\frac{3+\sqrt{99}}{2}$		$\infty+$
$u-\frac{(3+\sqrt{99})}{2}$	$-$		$-$		$+$	
$u+\frac{\sqrt{99}-3}{2}$	$-$		$+$		$+$	
	$+$		$-$		$+$	

$\Rightarrow A\cap B=\{4,5,6\}$

$B - A = B \cap A^c$

creo $B = \{x \in \mathbb{N} / x^2 + 1 \leq 12\}$

$A = \{x \in \mathbb{N} / x = \frac{1}{3}(2k-1), k \in \mathbb{N}\}$

$A^c = \{x \in \mathbb{N} / x \neq \frac{1}{3}(2k-1), k \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow$ veo $B = x^2 + 1 \leq 12$

$x^2 - 11 \leq 0$

$(x - \sqrt{11})(x + \sqrt{11}) \leq 0$

$\sqrt{11} \approx 3,317$

creo $(x - 3,317)(x + 3,317) \leq 0$

	$-\infty$		$x + 3,317$		$x - 3,317$		$+\infty$
$x + \sqrt{11}$		$-$		$+$		$+$	
$x - \sqrt{11}$		$-$		$-$		$+$	
		$+$		$-$		$+$	

$\Rightarrow -3,317 < x < 3,317$

$\Rightarrow x = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$? $\times$

$x = \{0, 1, 2\}$?

$x = \{1, 2\}$

luego si $x = 1$

$1 \neq \frac{1}{3}(2k-1)$ $\rightarrow k = \frac{4}{2} = 2 \in \mathbb{N}$ //

4) Dado los relaciones:

$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / x^2 - 2y = 3\}$

$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / x > y \vee x < y\}$

determinar $R_1 - R_2$

Veo $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / x^2 - 2y = 3\}$

$\Rightarrow \quad x^2 - 2y = 3$

$x^2 - 3 = 2y$

$y = \frac{x^2 - 3}{2}$

$\Rightarrow$ si $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$ X

si $x = \pm 1 \Rightarrow y = \frac{1-3}{2} = -1$

$(1,-1)$ o $(-1,-1)$

si $x = \pm 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ X

si $x = \pm 3 \Rightarrow y = \frac{9-3}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$(3,3); (-3,3)$

si $x = \pm 4 \Rightarrow y = \frac{16-3}{2} = \frac{13}{2}$ X

si $x = \pm 5 \Rightarrow y = \frac{25-3}{2} = \frac{22}{2} = 11$

$(5,11); (-5,11)$

si $x = \pm 6 \Rightarrow y = \frac{36-3}{2} = \frac{33}{2}$ ✓

si $x = \pm 7 \Rightarrow y = \frac{49-3}{2} = \frac{46}{2} = 23$ ✓

$(7, 23) ; (-7, 23)$

si $R_1 - R_2 = R_1 \cap R_2^c$

$\Rightarrow R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / x^2 - 2y = 3\}$

$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / x > y \vee x < y\}$

$\hookrightarrow R_2^c = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / x \leq y \wedge x \geq y\}$

$\hookrightarrow x = y$

si $x^2 - 2y = 3$

$y = \frac{x^2 - 3}{2}$

$\rightarrow x = \frac{x^2 - 3}{2} \rightarrow 2x = x^2 - 3$

$\rightarrow x^2 - 3 - 2x = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

$x = 3$

$x = -1$

$\Rightarrow R_1 - R_2 = \{(3,3) ; (-1,-1)\}$

↳ 5) En $\mathbb{Z}$ se define la relación T como $(x,y) \in T$ $\Leftrightarrow$ $x-y$ es divisible por 5. Determine cual de las siguientes proposiciones es verdadera

a) $(x,y) \in T \Rightarrow (y,x) \in T$

$\text{si } (x,y) \in T \Rightarrow x-y = 5p$ (Hipotesis)

tesis $(y,x) \in T \rightarrow y-x = 5p$

Por ejemplo $(6,1) \Rightarrow 6-1 = 5$ //

$\rightarrow (1,6) \in T$?

↳ $1-6 = -5(p=-1)$

luego si $y-x = 5p$

$y-x = -(x-y)$

$= -(5p)$

$y-x = 5(-1)\cdot p$; clausulo.

$y-x = 5k$ //

$\therefore$ si es verdad

Escaneado con CamScanner

b) $(x,4) \in T \Rightarrow x$ es multiplo de 5

Hipotesis $(x,4) \in T \to (x-4) = 5p$; $p \in \mathbb{Z}$

tesis : x es multiplo de 5

si $x = 14 \to (14,4) \in T$ ¿?

$\to 14 - 4 = 10$
$= 5 \cdot 2$ si es multiplo

pero 14 es multiplo de 5 ?

No $\to$ por contraejemplo este enunciado es falso

c) $(2,17) \in T$

$\to 2 - 17 = -15$
$= 5 \cdot 3 \cdot (-1)$ //

este enunciado es verdadero

d) $(7n, -8n) \in T, \forall n \in \mathbb{N}$

si $(7n, -8n) \in T \to 7n - (-8n) = 15n$
$= 5 \cdot 3 \cdot n$
$= 5 \cdot p$ //

si es verdad

6) Sea $A = \{2, 3, 5, 6\}$ y las relaciones:

$R_1 = \{(x, y) \in A^2 / x \text{ es divisible por } y\}$

$R_2 = \{(x, y) \in A^2 / xy \geq 15\}$

Si $R = (R_1 \cup R_2)^c - (R_1 - R_2)^{-1}$

determine dom(R); Rec (R) y R^{-1}

Sea $R_1 = \{(2,2); (3,3); (5,5); (6,6); (6,3); (6,2)\}$

Sea $R_2 = \{(6,5); (5,6); (6,3); (3,6); (5,3); (3,5); (5,5);$
$(6,6)\}$

$R_1 \cup R_2 = \{(2,2); (3,3); (5,5); (6,6); (6,3); (6,2);$
$(6,5); (5,6); (3,6); (5,3); (3,5);\}$

$(R_1 \cup R_2)^c = \{(2,3); (2,5); (2,6); (3,2); (5,2)\}$

Luego $R_1 - R_2 = \{(2,2); (3,3); (6,2)\}$

$(R_1 - R_2)^{-1} = \{(2,2); (3,3); (2,6)\}$

Finalmente:

$R = \{(2,3); (2,5); \cancel{(2,6)}; (3,2); (5,2)\}$

$- \{(2,2); (3,3); \cancel{(2,6)}\}$

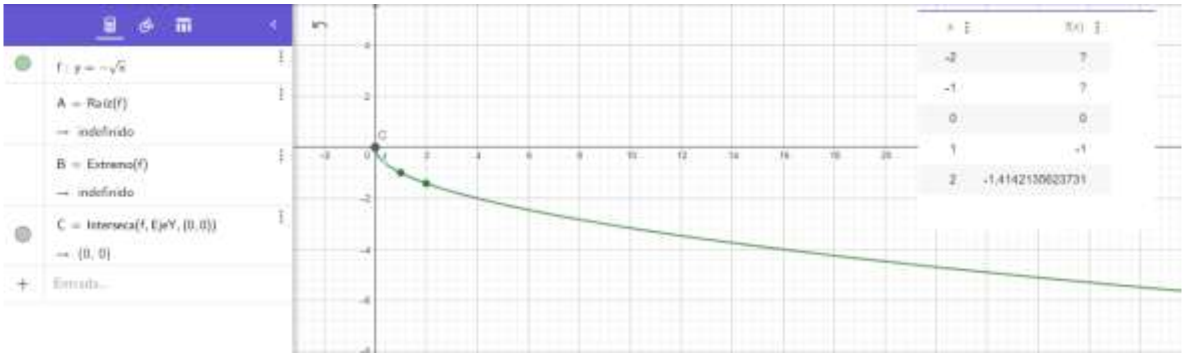
$R = \{(2,3); (2,5); (3,2); (5,2)\}$

$Dom(R) = \{2, 3, 5\}$

$Rec(R) = \{3, 5\ 2\}$

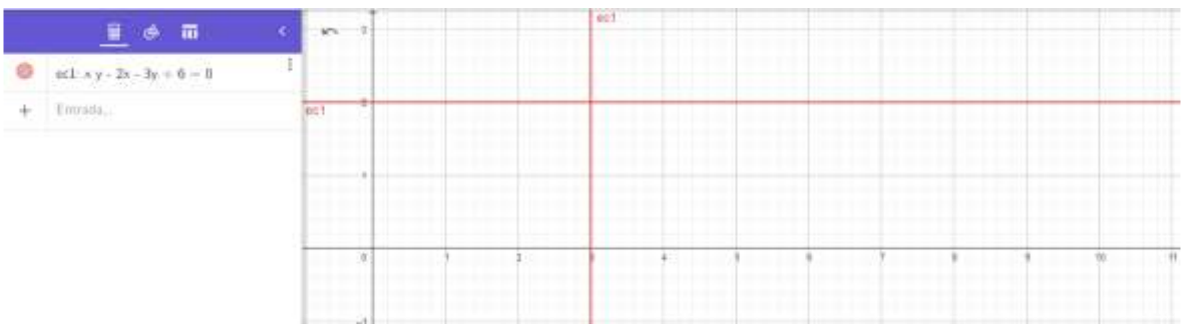
$R^{-1} = \{(3,2); (5,2); (2,3); (2,5)\}$

a) $y = -\sqrt{x}$



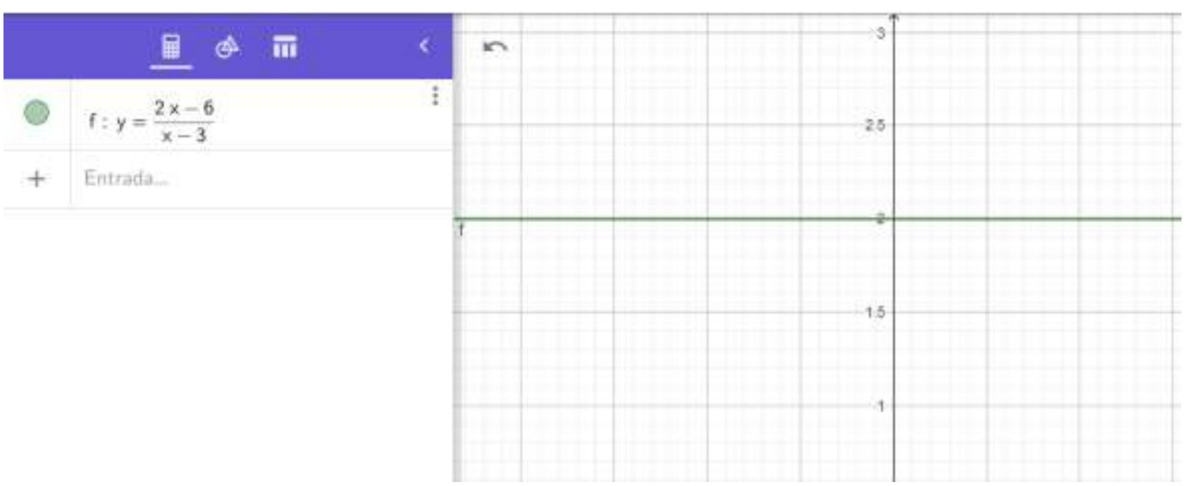
b) $xy - 2x - 3y + 6 = 0$

Manteniendo la ecuación:

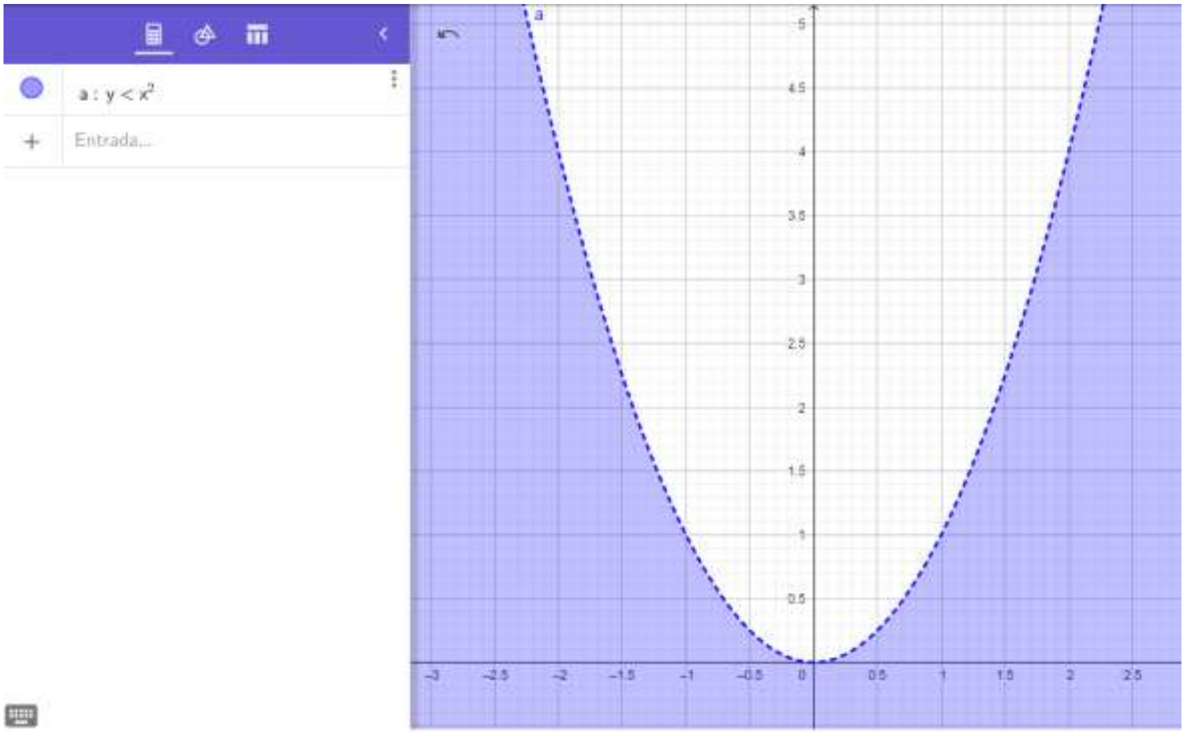


Despejando enterminos de y:

$$y = \frac{2x - 6}{x - 3} = \frac{2 * (x - 3)}{x - 3}; x \neq 3 \longrightarrow \ y = 2$$

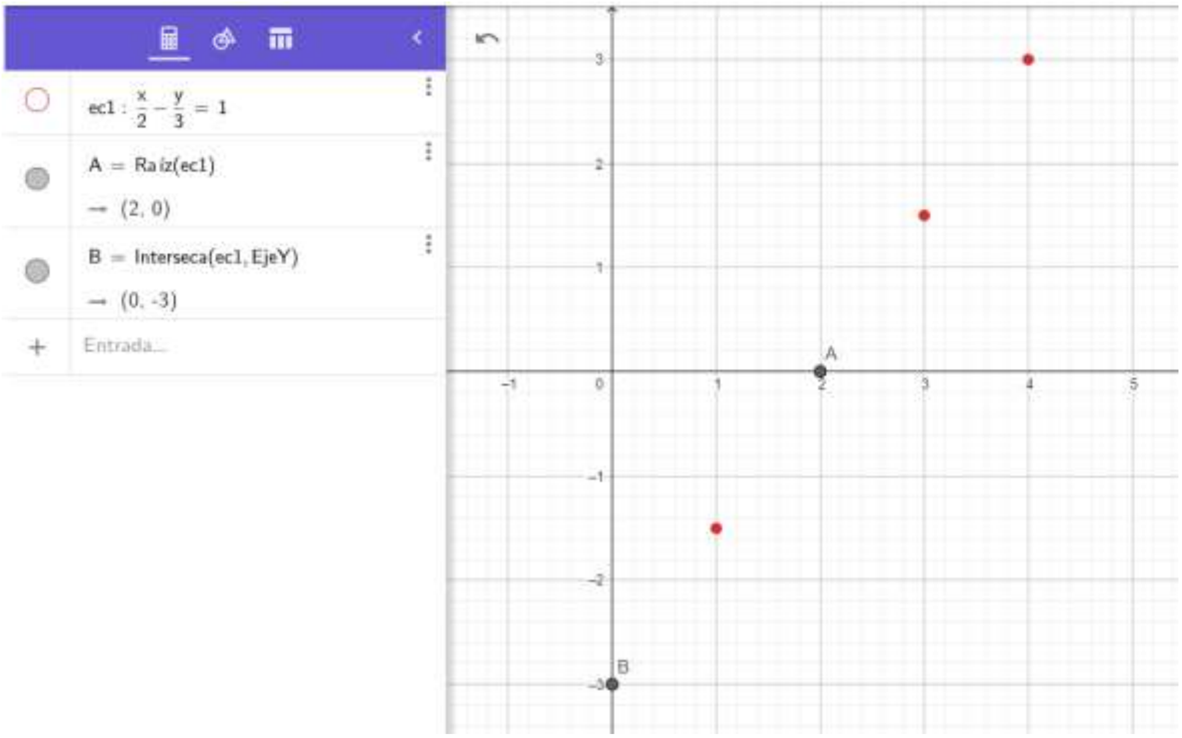


c) $y < x^2$



d) $2 < |x - 4| \leq 12$ falta especificar y

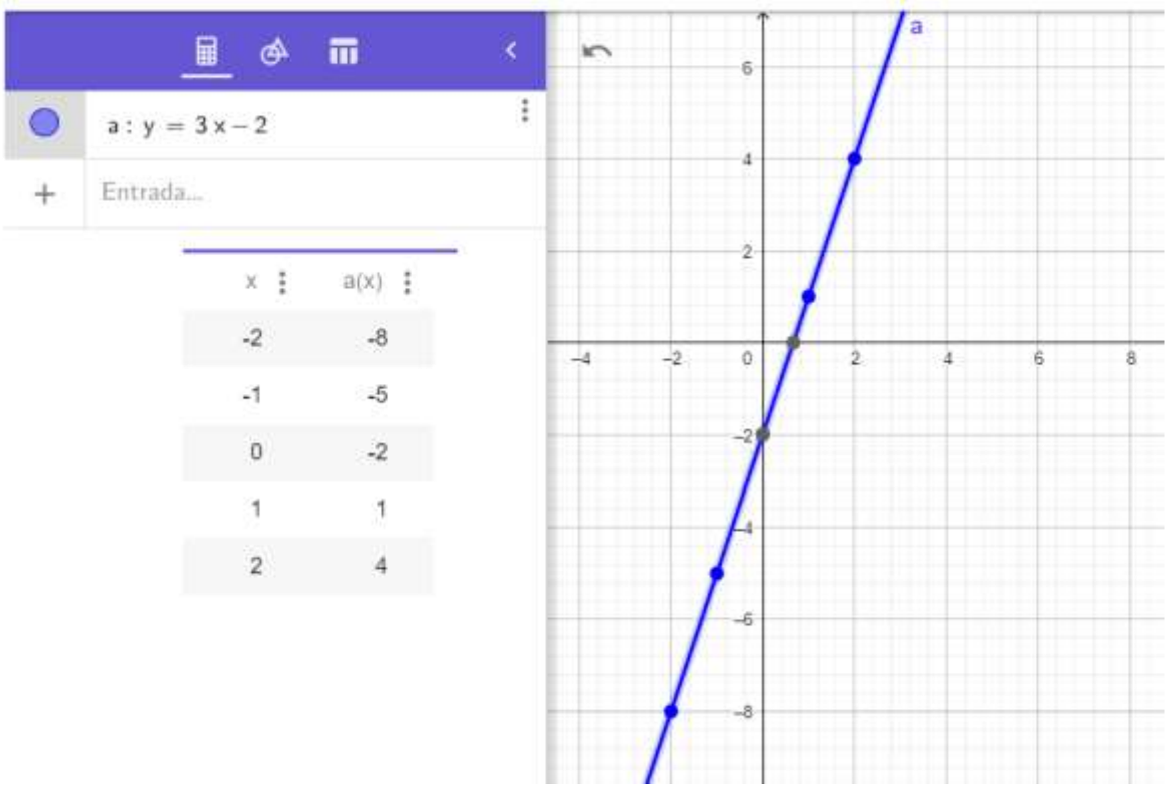
e) $1 < x < 4 \wedge \frac{x}{2} + \left(\frac{y}{-3}\right) = 1$

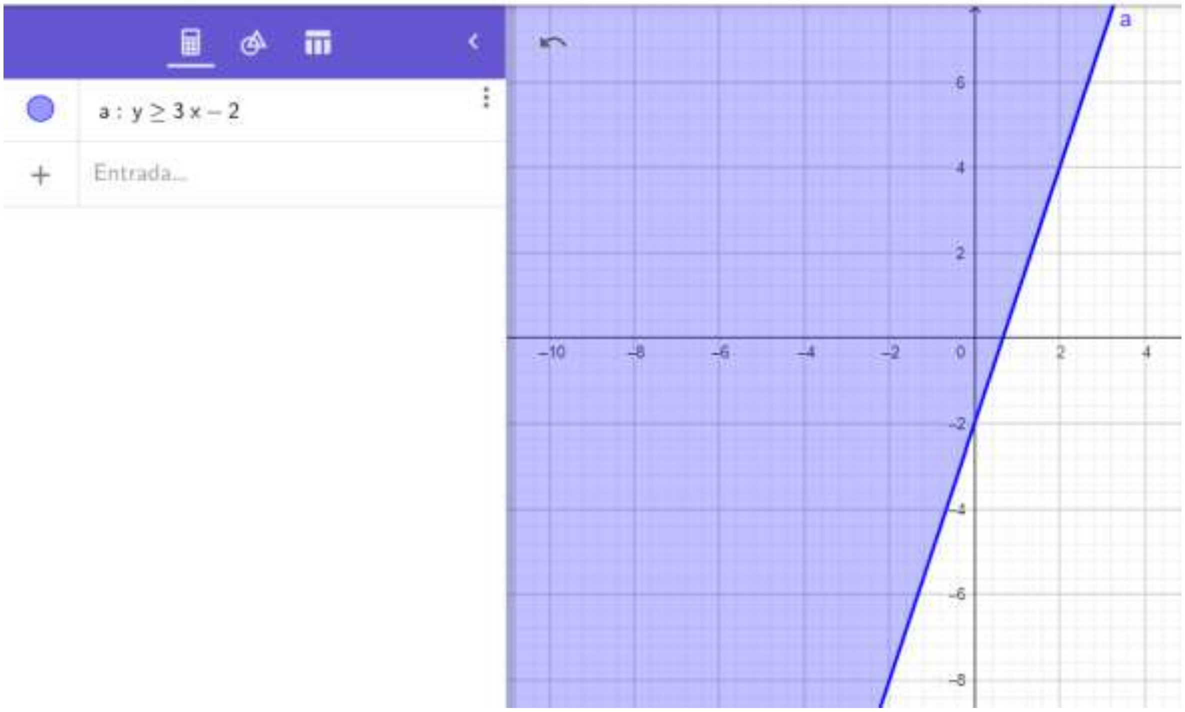


f) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1 \wedge y \geq 3x - 2$

Primero gráfico:

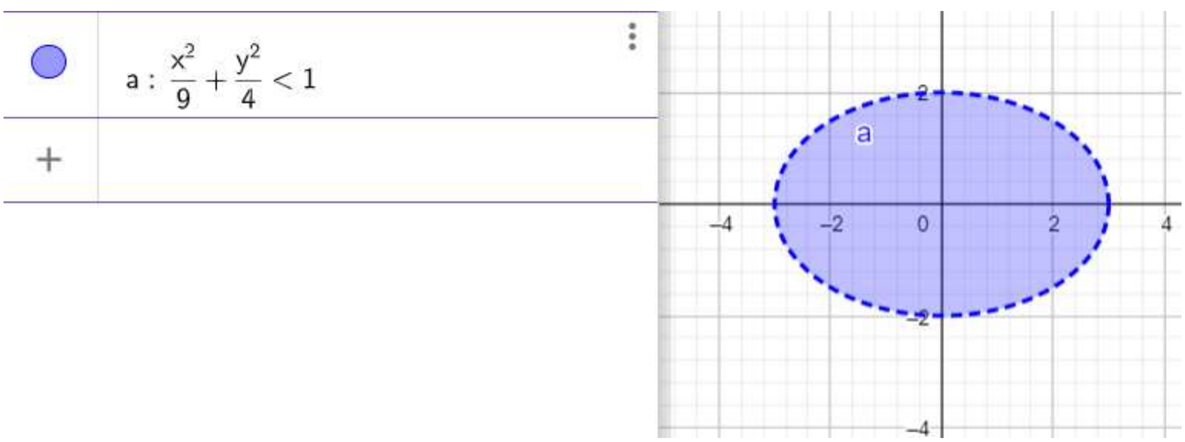
$$y \geq 3x - 2$$



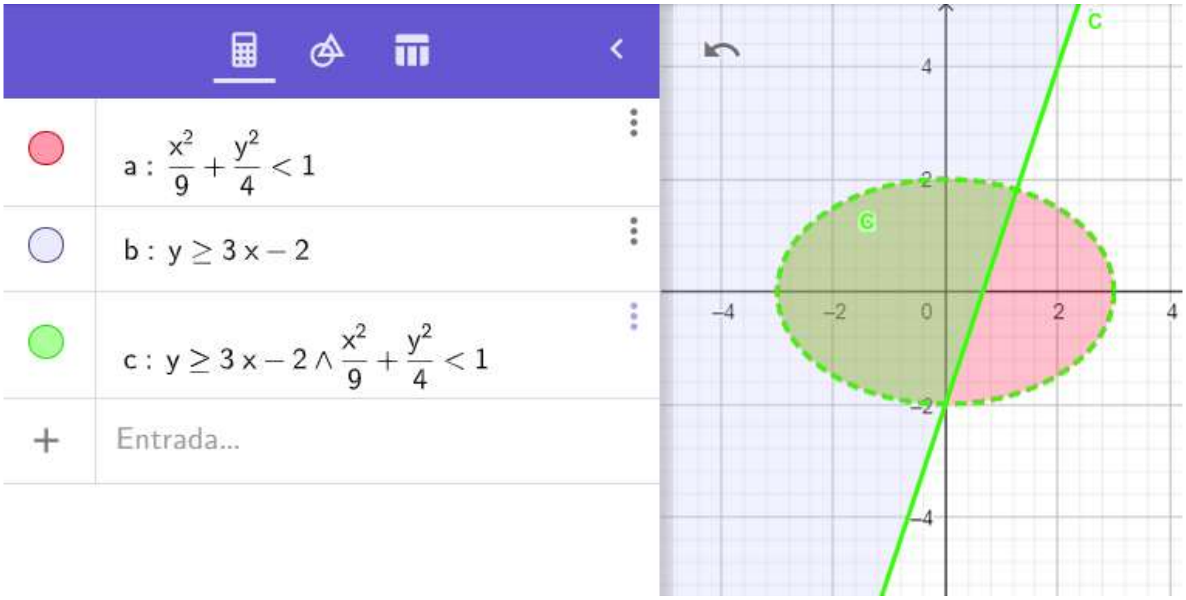


Luego grafico:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$$



Luego finalmente su intercepción:


$a : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$
$b : y \geq 3x - 2$
$c : y \geq 3x - 2 \wedge \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$
Entrada...
c
c
4
2
–2
–4
–4
–2
0
2
4