Universidad de Tarapacá
Facultad de Ciencias
Dpto. de Matemática

TUTORIA N°9
CÁLCULO 1

Limites especiales

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$
2. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$
3. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad a>0$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$
6. $\lim_{x\to x_0} a^{f(x)}=a^{\lim_{x\to x_0} f(x)}\quad a>0.$

Propiedades trigonometría

$(sen\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1$	$\sec\alpha=\frac{1}{(\cos\alpha)}$
$tg\alpha=\frac{(sen\alpha)}{(\cos\alpha)}$	$\operatorname{cossec}\alpha=\frac{1}{(sen\alpha)}$

$sen(2\alpha)=2sen\alpha\cos\alpha$

$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-sen^2\alpha$

$tg(2\alpha)=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

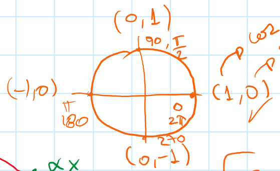
$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

$sen\ (-\alpha)=-sen\alpha$

$\cos\ (-\alpha)=\cos\alpha$

$tg\ (-\alpha)=-tg\alpha$



cos, sen

límite de una cte.

1. **Desarrollar los siguientes limites**

a) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(\alpha x)}{sen(\beta x)}=\frac{sen(\alpha\cdot 0)}{sen(\beta\cdot 0)}=\frac{0}{0}\to F.I$

$=\lim_{x\to 0}\frac{sen(\alpha x)\cdot\frac{\alpha x}{\alpha x}}{sen(\beta x)\cdot\frac{\beta x}{\beta x}}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{sen\ \alpha x}{\alpha x}}{\frac{sen\ \beta x}{\beta x}}\cdot\frac{\alpha x}{\beta x}\right]=\frac{\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{sen\ \alpha x}{\alpha x}}^{\text{lim espec.}}}{\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{sen\ \beta x}{\beta x}}_{\text{lim esp.}}}\cdot\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}}$

$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x}=1$

$=\frac{1}{1}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$

$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{sen\ \alpha x}{sen\ \beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2}=\frac{1-\cos 0}{0}=\frac{0}{0}\ F.I$

$sen^2x+\cos^2x=1\to\cos^2x=1-sen^2x$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-sen^2x)}{x^2(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+sen^2x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2x}{x^2}\cdot\frac{1}{(1+\cos x)}=\overbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{sen x}{x}\right)^2}^{\text{lim espec.}}\cdot\frac{1}{\lim_{x\to 0}(1+\cos x)}$

$=1\cdot\frac{1}{1+\cos 0}=1\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

c) $\lim_{x\to -2\pi}\frac{1-\cos(x)}{(x+2\pi)^2}$

Tarea ∇_0

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^x = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty$

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-1}{x-1}+\frac{4}{x-1}\right]^x = \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{4}{x-1}\right]^{\frac{x-1}{4}\cdot\frac{4}{x-1}\cdot x}$

$x+3 = (x-1)+4$

$= \left(\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{4}{x-1}\right]^{\frac{x-1}{4}}}_{e}\right)^{\frac{4x}{x-1}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x-1}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x-1}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{1-\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

$= e^4$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^x = e^4$

e) $\lim_{x\to\infty}(\ln(2x+1)-\ln(x+2)) = \infty-\infty$ F.I

$= \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x+2}\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x+x+2-1}{x+2}\right) = \ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+2)+(x-1)}{x+2}\right)$

$= \ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+2}+\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x+2}}$

$= \ln\left[\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{x-1}}}_{\text{l.espec.}}\right]^{\frac{x-1}{x+2}}$ $\lim_{x\to\infty}\frac{1x-1}{1x+2}\cdot\ln e = 1\cdot 1 = 1$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+10x)}{x}$

g) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$

h) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$

i) $\lim_{x\to 3}\frac{5^{x-3}-e^{x-3}}{sen(x-3)}$

j) $\lim_{x\to 0}\frac{3sen(\pi+x)-2sen(x)}{4x}$

k) $\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}+sen(x-1)-1}{\ln(x)}$

l) $\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x}}$

m) $\lim_{x\to 2}\frac{sen(\pi(x-2))}{(x-2)(x-3)}$

n) $\lim_{x\to 3}\frac{sen(\pi(x-2))}{(x-2)(x-3)}$

Tarea ∇_0

Asíntotas Verticales, Horizontales y Oblicuas

1. La recta $x=a$ es una asíntota vertical de f, si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ó $\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$.

2. La recta $y=mx+b$ es una asíntota oblicua derecha de f, si

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = m \quad y \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx) = b$$

① ②

3. La recta $y=mx+b$ es una asíntota oblicua izquierda de f, si

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = m \quad y \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx) = b$$

4. Si en los casos 2 ó 3, $m=0$ se tendrá una asíntota horizontal $y=b$.

1. Determinar las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $\cancel{f(x) = \frac{1}{x-4}}$

$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ ≥ 0

$\text{Dom } f(x) = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	
$x+1$	$-$	$+$	$+$	
x^2-1	$+$ ✓	$-$	$+$ ✓	

Para $x=1$: $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{+}{+} = +\infty$

$1 \quad +\infty$

$1{,}001 \quad 2$

$\therefore$ en $x=1$ es una A. Vertical

Para $x=-1$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{+}{+} = +\infty \qquad -\infty \quad -1 \quad -1{,}005$$

$\therefore$ en $x=-1$ es una A. Vertical.

A.O.D.: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ y $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-mx) = b$ $\qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad \sqrt{x^2} = |x| \begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\cancel{\frac{1}{x^2}}_{0}}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = \boxed{1 = m}$$

Calcular "b": $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-mx) = b$

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - x\right] = \infty - \infty \text{ F.I.}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[x^2-(x^2-1)\right]}{\sqrt{x^2-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(x^2-x^2+1\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{x^2-1}+(x^2-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} + x^2-1}$$

$\sqrt{x^2}$ saldrá como "x" como $\underline{x\to+\infty}$

$|x| \begin{cases} x, & x\geq 0 \checkmark \\ -x, & x<0 \end{cases}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)\cdot\frac{1}{x^2}}{\left(x^2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + x^2 - 1\right)\cdot\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + \frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{x}}^{0} + \cancel{\frac{1}{x^2}}^{0}}{1\cdot\sqrt{1-\cancel{\frac{1}{x^2}}_{0}} + 1 - \cancel{\frac{1}{x^2}}_{0}} = \frac{0+0}{1\cdot\sqrt{1}+1-0} = \frac{0}{2} = 0 = b$$

$m=1$; $b=0$

$\therefore$ $y = mx+b \Rightarrow y = x$ es una Asíntota Oblicua Derecha.

b) $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^2-4}}$