Universidad de Tarapacá
Facultad de Ciencias
Dpto. de Matemática

TUTORIA N°8
CÁLCULO 1

Los limites laterales cumplen con lo siguiente:

1. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \wedge \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$
2. Si algunos de los limites laterales no existe, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) \nexists$
3. Si $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L_1 \wedge \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_2 \Longrightarrow L_1 \neq L_2$, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *no existe*

1.

a) $\lim_{x\to 0} |x|$ $\longrightarrow$ Dom f : $\mathbb{R}$

i) Abrir el V.A.

$$|x| \begin{cases} x, & x \geq 0 \ * \\ -x, & x < 0 \ * \end{cases}$$

$$\exists \lim_{x\to 0} |x| \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = L \text{ y } \lim_{x\to 0^+} f(x) = L, \quad L = L$$

$$* \lim_{x\to 0^-} -x = 0$$
$$* \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} |x| = 0$$

b) $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}$ Dom $f(x) = \mathbb{R}_0^+$ $x \geq 0$

$$\exists \lim_{x\to 0} \sqrt{x} \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} \sqrt{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}$$

$\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x} \nexists$ dado que el Dom $f(x) = \mathbb{R}_0^+$

pero $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}$ $\exists$ $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$

$$\therefore \nexists \lim_{x\to 0} \sqrt{x}$$

c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{|x|} + 1\right)$

De Tarea

1. Sea $f(x) = \begin{cases} x^3, si\ x \leq 1 \\ -x+2, si\ x > 1 \end{cases}$, *Calcular* $\lim_{x\to 1} f(x)$

$$\exists \lim_{x\to 2} f(x) \Leftrightarrow \underset{(i)}{\lim_{x\to 2^-} f(x)} = \underset{(ii)}{\lim_{x\to 1^+} f(x)}$$

(i) $\lim\limits_{x\to 1^-} x^3 = 1^3 = 1$

(ii) $\lim\limits_{x\to 1^+} -x+2 = -1+2 = 1$

$\Big\}$ (i) = (ii) $\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)\ \exists$

2. Sea $f(x)\begin{cases} 4, si\ x<1 \\ 3x+1, si\ 1\le x<2 \\ 4, si\ x=2 \\ -5x+7, si\ x>2 \end{cases}$, *Calcular* $\lim\limits_{x\to1} f(x)\ y\ \lim\limits_{x\to2} f(x)$

(i) $x\to 1^-$ $\to x\to 1^+$, $x\to 2^-$ $\to x\to 2^+$

$\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) \Leftrightarrow \underbrace{\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)}_{(i)} = \underbrace{\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)}_{(ii)}$

(i) $\lim\limits_{x\to 1^-} 4 = 4$

(ii) $\lim\limits_{x\to 1^+} 3x+1 = 3\cdot 1+1 = 4$

$\Big\}$ (i) = (ii) ó $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 4$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)\ \exists$

$\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x) \Leftrightarrow \underbrace{\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)}_{(i)} = \underbrace{\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)}_{(ii)}$

(i) $\lim\limits_{x\to 2^-} 3x+1 = 3\cdot 2+1 = 7$

(ii) $\lim\limits_{x\to 2^+} -5x+7 = -5\cdot 2+7 = -10+7 = -3$

$\Big\}$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

$\therefore \nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

3. Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x-2}, si\ x\neq 2 \\ 0, si\ x=2 \end{cases}$, *Calcular* $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

i) Abrir V.A $\quad |x-2| \begin{cases} x-2, & x>2 \\ -(x-2), & x<2 \end{cases}$

$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-2}, & x>2 \\ \frac{-(x-2)}{x-2}, & x<2 \\ 0, & x=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(x) = \begin{cases} 1, & x>2\ ✓ \\ -1, & x<2\ ✓ \\ 0, & x=2 \end{cases}}$

$\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x) \Leftrightarrow \underbrace{\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)}_{(i)} = \underbrace{\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)}_{(ii)}$

(i) $\lim -1 = -1$ $\Big\}$ $\lim f(x) \neq \lim f(x)$

(i) $\lim_{x\to 2^-} -1 = -1$

(ii) $\lim_{x\to 2^+} 1 = 1$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$\nexists \lim_{x\to 2} f(x)$

4. Sea $f(x) = \begin{cases} |x-3|, si\ x \neq 3 \\ 2, si\ x = 3 \end{cases}, Calcular \lim_{x\to 3} f(x)$

Tarea !

5. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2+3, si\ x \leq 1 \\ x+1, si\ x > 1 \end{cases}, Calcular \lim_{x\to 1} f(x)$

Tarea !

6. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2, si\ x \leq 2 \\ 8-2x, si\ x > 2 \end{cases}, Calcular \lim_{x\to 2} f(x)$

Tarea !

7. Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x-2}, si\ x < 2 \\ \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}, si\ x > 2 \end{cases}, Calcular \lim_{x\to 2} f(x)$

$\exists \lim_{x\to 2} f(x) \iff \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$\Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$

i   ii

i) $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{3-\sqrt{x^2+5}}{x-2} = \dfrac{3-\sqrt{2^2+5}}{2-2} = \dfrac{3-3}{2-2} = \dfrac{0}{0} \rightarrow F.I$

$\rightarrow x-2 \rightarrow$ este es el factor que indetermina mi límite

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x-2} \cdot \frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}}$$

$\lim$

$4-x^2 \Rightarrow (2-x)(2+x)$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{9-(x^2+5)}{(x-2)\cdot(3+\sqrt{x^2+5})} = \lim_{x \to 2^-} \frac{\overbrace{9-x^2-5}^{4-x^2}}{(x-2)(3+\sqrt{x^2+5})}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x^2-4)}{(x-2)\cdot(3+\sqrt{x^2+5})} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(3+\sqrt{x^2+5})} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x+2)}{3+\sqrt{x^2+5}}$$

$$= \frac{-(2+2)}{3+\sqrt{2^2+5}} = \frac{-4}{3+\sqrt{9}} = \frac{-4}{6} = \boxed{\frac{-2}{3}}$$

ii) $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \dfrac{4-2^2}{3-\sqrt{2^2+5}} = \dfrac{0}{0} \rightarrow F.I$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} \cdot \frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{(4-x^2)\cdot(3+\sqrt{x^2+5})}{9-(x^2+5)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{\underbrace{9-x^2-5}_{4-x^2}}$$

$4-x^2 \rightarrow (2-x)(2+x)$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{\cancel{(2-x)}\cancel{(2+x)}(3+\sqrt{x^2+5})}{\cancel{(2-x)}\cancel{(2+x)}}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} 3+\sqrt{x^2+5} = 3+\sqrt{2^2+5} = 3+3 = \boxed{6}$$

$\therefore \lim_{x \to 2} f(x) \nexists$

8. Determinar A y B de tal manera que:

$\lim_{x\to 1} f(x)$ y $\lim_{x\to 3} f(x)$ Existan, siendo $f(x) = \begin{cases} 2x-1, x\in(-\infty,1) \\ Ax^2-1, x\in[1,3) \\ x^3-B, x\in[3,+\infty) \end{cases}$ $\to x<1$ $\to 1\leq x<3$ $\to x>3$

1

1) $\exists \lim_{x\to 1} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

i) $\lim_{x\to 1^-} (2x-1) = 2\cdot 1 - 1 = 1$

ii) $\lim_{x\to 1^+} (Ax^2-1) = A\cdot 1^2 - 1 = A-1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

$\to 1 = A-1 \Rightarrow \boxed{A=2}$

$\to$ reemplazamos $A=2$ en el limite por la derecha

$= 2\cdot 1 - 1 = 1$

$\therefore$ para que exista el $\lim_{x\to 1} f(x)$, "A" debe tomar el valor de 2.

2) $\exists \lim_{x\to 3} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$

i) $\lim_{x\to 3^-} 2\cdot x^2 - 1 = 2\cdot 3^2 - 1 = 17$

ii) $\lim_{x\to 3^+} x^3 - B = 3^3 - B = 27 - B$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$

$\to 17 = 27 - B$

$B = 27 - 17$

$\boxed{B = 10}$

$\therefore$ Para que $\exists$ el $\lim_{x\to 3} f(x)$, "B" debe tomar el valor de 10.

$\boxed{B = 10}$

∴ Para que ∃ el $\lim_{x \to 3} f(x)$, "B" debe tomar el valor de 10.

reemplazando $B = 10$

$$\lim_{x \to 3^+} x^3 - 10 = 3^3 - 10$$
$$= 27 - 10$$
$$= 17$$

∴ Para que ∃ $\lim_{x \to 1}$ y $\lim_{x \to 3}$

"A" debe tomar el valor de 2 : $A = 2$

y "B" debe tomar el valor de 10 : $B = 10$