Universidad de Tarapacá
Facultad de Ciencias
Dpto. de Matemática

# TUTORIA N°1
# CÁLCULO 1

**Tutora:** Griselda Aguirre F. **Profesor:** Manuel Pérez V. **Fecha:** 15-05-2020

**CIRCUNFERENCIA**

1. Reducir la ecuación dada a la forma ordinaria y determinar si representa o no una circunferencia. En caso afirmativo hallar su centro y radio:
   a) $2x^2+2y^2-6x+10y+7=0$
   b) $4x^2+4y^2+28x-8y+53=0$
2. Determinar la ecuación de la circunferencia sabiendo que:
   a) Centro (-1,3) y pasa por (4,1)
   b) Pasa por (0,4), (1,2) y (3,2)
   c) Es circunferencia al triangulo cuyos lados están sobre:
   $L_1: 3x+2y=13$
   $L_2: x-2y+1=0$
   $L_3: x+2y=3$
   d) Pasa por A(-3,3) y B(1,4) y su centro está sobre la recta $3x-2y-23=0$

**PARÁBOLA**

3. Determinar las coordenas del vértice y foco, las ecuaciones de la directriz, eje focal y la longitud del lado recto de las siguientes parábolas:
   a) $4y^2-48x-20y=71$
   b) $9x^2+24x+72y+16=0$
   c) $4x^2+48y+12x=159$
4. Sean $C_1: x^2+y^2+10x-8y+37=0$ y $C_2: x^2+y^2+4x-8y+11=0$ . Determine la ecuación de la parábola, cuyo vértice con el centro de $C_2$ y cuyo foco coincide con el centro de $C_1$. Además, determinar la ecuación del eje focal, la ecuación de la directriz y los extremos del lado recto de la parábola.

"Solución Practica 1

1) a) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0 \quad /2$

$$x^2 + y^2 - 3x + 5y + \frac{7}{2} = 0$$

$$\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \left(y^2 + 5y + \frac{25}{4}\right) = -\frac{7}{2} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{-14+9+25}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{20}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = 5 \Rightarrow r^2 = 5$$

$\therefore$ Centro $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ radio $= \sqrt{5}$

Ejerc. Tutoria 1. a) y

B) $4x^2 + 4y^2 + 28x - 8y + 53 = 0 \quad /4$

$$x^2 + y^2 + 7x - 2y + \frac{53}{4} = 0$$

$$\left(x^2 + 7x + \frac{49}{4}\right) + \left(y^2 - 2y + 1\right) = -\frac{53}{4} + \frac{49}{4} + 1$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{-53+49+4}{4}$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 0 \Rightarrow r^2 = 0$$

$\therefore$ No representa una circunferencia, es un pto $(h,k)$

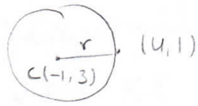
# Guia 1 "Calculo 1"

## A) Circunferencia.

1.- Determinar la ecc. de la circunf. sabiendo que:

Tutoria Nº 1
Ej. 2. a, b

a) $C(-1,3)$ y pasa por $(4,1)$.




i) ecc. ordinaria: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = r^2$$

ii) como la ⊗ pasa por el Pto (4,1), hay una distancia que sera el radio, aplicando la formula de distancia entre dos ptos

$$d(C, Pto) = \sqrt{(-1-4)^2 + (3-1)^2}$$

$$d(C, Pto) = \text{radio} = \sqrt{29}$$

iii) Ecc. ordinaria.

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 29 \;\#$$

b) Pasa por $(\overset{x}{0},\overset{y}{4})$, $(1,2)$, y $(3,2)$.

i) Ecc. General ⊗ : $C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

ii) los 3 ptos pasan por la ⊗, lo cual se hara un sist. de ecc. reempl cada Pto

como $(0,4) \in C$ : $16 + 4E + F = 0$ $\rightarrow$ i) $4E + F = -16$

como $(1,2) \in C$ : $1+4 + D + 2E + F = 0$ $\rightarrow$ ii) $D + 2E + F = -5$

como $(3,2) \in C$ : $9+4 + 3D + 2E + F = 0$ $\rightarrow$ iii) $3D + 2E + F = -13$

iii) juntando ii y iii)

$$\left.\begin{aligned} D + 2E + F &= -5 \\ 3D + 2E + F &= -13 \end{aligned}\right| /-1 \quad \rightarrow \quad 2D = -8$$

$$\boxed{D = -4}$$

iv) reempl "D" en las ecc.

i) $4E + F = -16$
ii) $2E + F = -1$
iii) $2E + F = -1$ $\rightarrow$ $E = \dfrac{-1-F}{2}$

iii) en i) $4\left(\dfrac{-1-F}{2}\right) + F = -16$

$$-2 - 2F + F = -16$$

$$-F = -14$$

$$\boxed{F = 14}$$

De iii) $E = \dfrac{-1-14}{2}$

v) reemplaz. D, E y F en la ecc. general

$$x^2+y^2-4x-\frac{15}{2}y+14=0$$

$$(x^2-4x+4)+\left(y^2-\frac{15}{2}y+\frac{225}{16}\right)=-14+4+\frac{225}{16}$$

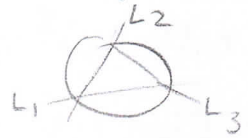
$$(x-2)^2+\left(y-\frac{15}{4}\right)^2=\frac{65}{16}$$ ecc. ordinaria.

c) La circunscrita al triangulo cuyos lados estan sobre:

$L_1: 3x+2y=13$

$L_2: x-2y+1=0$

$L_3: x+2y=3$




i) sist. ecc. con las rectas, para encontrar los ptos de intersecc

$L_1: 3x+2y=13$

$L_2: x-2y=-1$

$4x=12$

$\boxed{x=3}$

$\rightarrow 3-2y=-1$

$-2y=-4$

$\boxed{y=2}$

∴ Pto entre $L_1$ y $L_2$ es (3, 2)

$L_2: x-2y+1=0$

$L_3: x+2y=3$

$2x=2$

$x=1$

$\rightarrow 1+2y=3$

$2y=2$

$y=1$

∴ Pto entre $L_2$ y $L_3$ es (1, 1)

$L_1: 3x+2y=13$ (−1)

$L_3: x+2y=3$

$-2x=-10$

$x=5$

$\rightarrow 5+2y=3$

$2y=3-5$

$y=-1$

∴ Pto entre $L_1$ y $L_3$ es (5, −1)

ii) los ptos pertenecen a la circunf: $C: x^2+y^2+Dx+Ey+F$

como $(3,2)\in C$ $\quad 9+4+3D+2E+F=0 \rightarrow 1)\ 3D+2E+F=-13$

como $(1,1)\in C$ $\quad 1+1+D+E+F=0 \rightarrow 2)\ D+E+F=-2$

como $(5,-1)\in C$ $\quad 25+1+5D-E+F=0 \rightarrow 3)\ 5D-E+F=-26$

) Sist. ecc.

1) y 2) :

$$3D + 2E + F = -13$$
$$D + E + F = -2 \quad /(-1)$$

$$2D + E = -11 \quad (a)$$

2) y 3) :

$$D + E + F = -2 \quad /(-1)$$
$$5D - E + F = -26$$

$$4D - 2E = -24 \quad (B)$$

(a) y (B) :

$$2D + E = -11 \quad /2$$
$$4D - 2E = -24$$

$$8D = -46$$

$$\boxed{D = -\frac{23}{4}}$$

$$\Rightarrow -2 \cdot \frac{23}{4} + E = -11$$

$$E = -11 + \frac{46}{4}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}}$$

2) $D + E + F = -2$

$$F = -2 + \frac{23}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{F = \frac{13}{4}}$$

$\therefore\ D = -\frac{23}{4}$, $E = \frac{1}{2}$ y $F = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ Ecc. General

$$C: x^2 + y^2 - \frac{23}{4} D + \frac{1}{2} E + \frac{13}{4} = 0$$

$$C: 4x^2 + 4y^2 - 23D + 2E + 13 = 0$$

...ulis 2. d)

D) ⊗ pasa por $A(-3,3)$ y $B(1,4)$ y su centro esta sobre la recta $3x-2y-23=0$

i) A y B son ptos de la curva, lo cual tienen el mismo radio, la distancia del $C(h,k)$ al A es igual a la distancia $C(h,k)$ pto B.

centro $= C(h,k)$

$d(A, \text{centro}) = d(B, \text{centro})$

$\sqrt{(-3-h)^2+(3-k)^2} = \sqrt{(1-h)^2+(4-k)^2} \quad /(\ )^2$

$9+\cancel{h^2}+6h+9+\cancel{k^2}-6k = 1+\cancel{h^2}-2h+16+\cancel{k^2}-8k$

$\boxed{8h+2k=-1}$ i

ii) el centro esta sobre la recta, lo cual reemplazo "x" y "y" por "h" y "k"

$3h-2k-23=0$ ii
$8h+2k=-1$ i
} sis. ecc

$11h=22$

$\boxed{h=2}$ ; de i) $8\cdot 2+2k=-1$, $k=-\frac{17}{2}$ } $C(2,-\frac{17}{2})$

i) Calculamos la distancia del pto A al centro

$$d(A, centro) = \sqrt{(-3-2)^2 + (3+\frac{17}{2})^2}$$

$$= \sqrt{25 + \frac{529}{4}} = \sqrt{\frac{629}{4}}$$

$$r = \sqrt{\frac{629}{4}} \Rightarrow r^2 = \frac{629}{4}$$

iv) la ecc. ordinaria:

$$C: (x-2)^2 + (y+\frac{17}{2})^2 = \frac{629}{4}$$

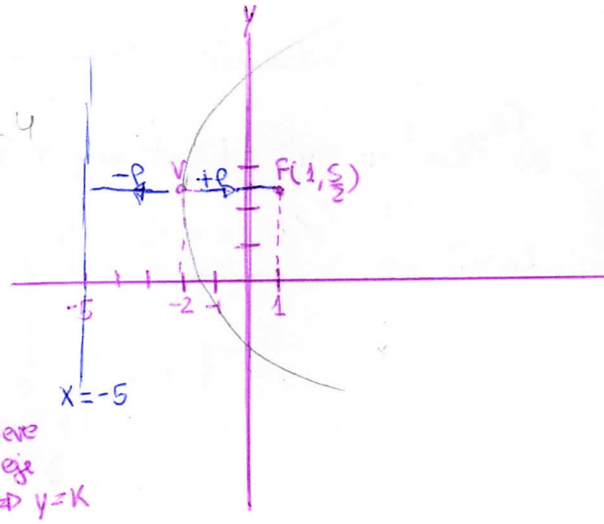
2) a) $4y^2 - 48x - 20y = 71 \quad / 4$

$y^2 - 12x - 5y = \frac{71}{4}$ $\qquad \frac{96}{4} = 24$

$\left(y^2 - 5y + \frac{25}{4}\right) = 12x + \underbrace{\frac{71}{4} + \frac{25}{4}}$

ola
a, b y c

$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12(x + 2)$




$+$ ; Parabola "⊂" se mueve en el eje "x" $\Rightarrow y = K$

LLR : $4|p| = 12$

$|p| = 3$

$p = 3 = 3 > 0,\ x > 0$ $\Rightarrow$ la parabola se abre a la derecha

$\Rightarrow$ eje Focal // eje x

Vertice Parabola : $V(-2, \frac{5}{2})$ $(h ; k)$ $\qquad 5 : 2 = 2{,}5$

Foco : $F(h+p, k) \Rightarrow F(-2+3, \frac{5}{2}) \Rightarrow F(1, \frac{5}{2})$

Directriz : $x = h - p \Rightarrow x = -2 - 3 \Rightarrow x = -5$

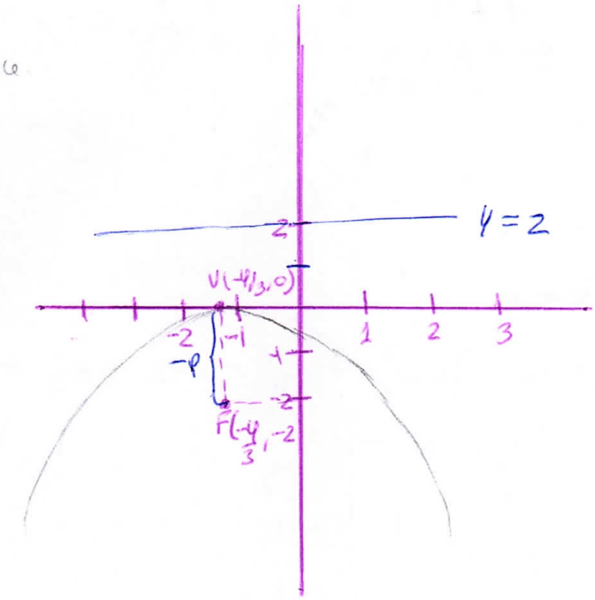
La linea recta ⊥ al eje Focal, a una distancia p del vertice

b) $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0 \quad / 9$

$x^2 + \frac{24}{9}x + \frac{72}{9}y = -\frac{16}{9}$

$\left(x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{64}{36}\right) = -8y \underbrace{- \frac{16}{9} + \frac{64}{36}}_{0}$

$\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 = -8y$




$-$ ; Parabola "∩" se mueve en el eje "y" $\Rightarrow x = h$

LLR : $4|p| = 8$

$|p| = 2$

$p = 2$ $\Rightarrow$ parabola se abre hacia Abajo

eje focal // eje y

Vertice parabola : $V(-\frac{4}{3}, 0)$ $\qquad 4 : 3 \approx 1{,}33$

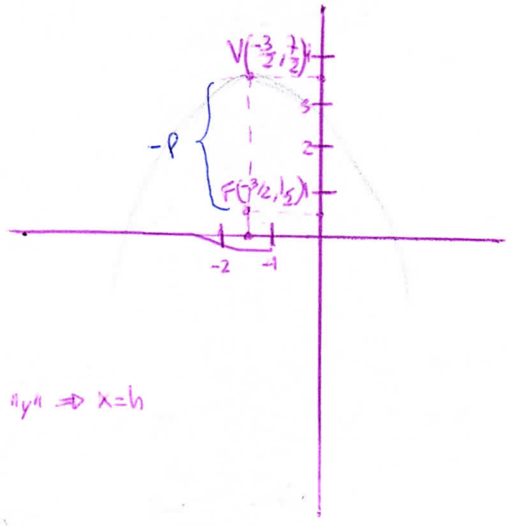
Focs : $F(h, k-p) \Rightarrow F(-\frac{4}{3}, 0-2) \Rightarrow F(-\frac{4}{3}, -2)$

Directriz : $y = k + p$ $\qquad (h, y+p) \to (-\frac{4}{3}, 2)$

$y = 0 + 2$

$y = 2$

y=13/2




C) $4x^2 + 48y + 12x = 159 \quad / 4$

$$x^2 + 12y + 3x = \frac{159}{4}$$

$$\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) = -12y + \frac{159}{4} + \frac{9}{4}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -12y + 42$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -12\left(y - \frac{7}{2}\right)$$

$\Rightarrow -$ ; Parabola "$\cap$" se mueve en el eje "y" $\Rightarrow x = h$

$3:2 \approx 1,5 \quad 7:2 \approx 3,5$

Vertice: $V\left(-\frac{3}{2}, +\frac{7}{2}\right)$

LLR: $4|p| = 12$

$|p| = 3 \quad \rightarrow$ parabola se abre hacia abajo

eje Focal // eje y

Focs. $F(h, k-p) \rightarrow F\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2} - 3\right) \rightarrow F\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Directriz: $y = k + p$

$$y = \frac{7}{2} + 3$$

$$y = \frac{13}{2}$$

4) $C_1: x^2+y^2+10x-8y+37=0$

$$(x^2+10x+25)+(y^2-8y+16)=-37+25+16$$
$$(x+5)^2+(y-4)^2=4$$

Circunferencia $C_1(-5,4)$ $r^2=2^2$

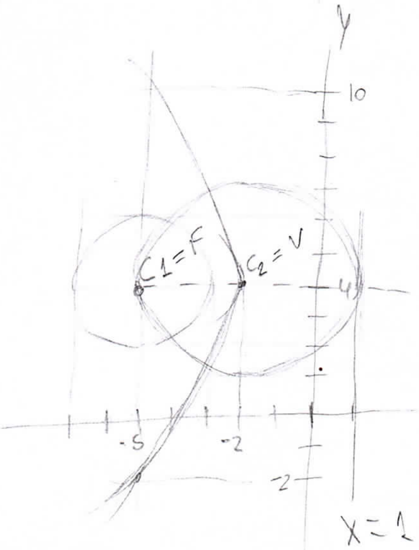
$C_2: x^2+y^2+4x-8y+11=0$

$$(x^2+4x+4)+(y^2-8y+16)=\cancel{-11}+\cancel{16}+4$$
$$(x+2)^2+(y-4)^2=3^2$$

Circunferencia $C_2(-2,4)$ $r=3$

* Se dice que el vertice de la parabola en el $C_2$ y Foco en $C_1$

$\therefore F(-5,4)$ ; $V(-2,4)$




eje Focal // eje X

$$d_{F,V}=P=\sqrt{(-5-(-2))^2+(4-4)^2}$$
$$=\sqrt{3^2}$$
$$\boxed{P=3}$$

Ejerc. 4 Para

Como el Foco se encuentra en el 1° cuadrante y el vertice esta mas alejado del Foco $\Rightarrow$ la parabola se abre hacia la izquierda

Directriz : $x=h+p$
$x=-2+3$
$x=1 \rightarrow$ Direct. $\perp$ eje focal

eje Focal : $y=4$

extremos del LLR : $\cdot(-5, 4-2p)=(-5, 4-2\cdot3)=(-5,-$
$\cdot(-5, 4+2p)=(-5, 4+6)=(-5,1$

Ecc. Parabola : $(y+2)^2=-4\cdot3(x-\cancel{4})$